Arunika Widya: Jurnal Pendidikan Dasar dan Menengah
Vol. 1 No. 2, Agustus 2025, pp. 81-88
https://terranovajournal.com/arunikacendekia
e-ISSN: 3090-5273
DOI: https://doi.org/10.59966/g2aqa765

Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Tak Homogen Orde Dua Menggunakan Metode Reduksi Orde

Hilda Ladan Bijani[1], Erdawati Nurdin[2]
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Indonesia
*)Corresponding author, E-mail: 12210523977@students.uin-suska.ac.id

Article Info

Article history:
Received June 13h, 2025
Revised July 28th, 2025
Accepted August 29th, 2025

Keyword:
Nonhomogeneous ordinary differential equations
order reduction method.

Kata Kunci:
Persamaan diferensial biasa tak homogen
Orde Dua
Metode reduksi orde

Abstract

Ordinary differential equations are generally divided into two types, namely homogeneous and non-homogeneous differential equations. To solve non-homogeneous ordinary differential equations, one method considered quite effective is order reduction. This technique is carried out by lowering the order of the equation by one degree so that the process of obtaining its solution becomes easier. This study aims to find the general solution of second-order non-homogeneous ordinary differential equations by applying the order reduction method, without first having to find the homogeneous solution. The solution is obtained by converting the second-order equation into a first-order equation through substitution in the derivative of the variable, while the constants that appear are determined based on the roots of its characteristic equation. Research findings show that this method can provide general solutions equivalent to conventional approaches, but through a more concise procedure. In addition, the calculation results are displayed graphically using the Desmos application, making it easier to understand how the solution function changes with respect to its independent variables.

Abstrak Persamaan diferensial biasa umumnya terbagi menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial homogen dan tidak homogen. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang bersifat tidak homogen, salah satu metode yang dinilai cukup efektif adalah reduksi orde. Teknik ini dilakukan dengan menurunkan orde persamaan menjadi satu tingkat lebih rendah sehingga proses memperoleh solusinya menjadi lebih mudah. Penelitian ini dimaksudkan untuk menemukan bentuk solusi umum dari persamaan diferensial biasa orde dua yang tidak homogen dengan menerapkan metode reduksi orde, tanpa harus terlebih dahulu mencari solusi homogen. Penyelesaiannya dilakukan dengan mengonversi persamaan orde dua tersebut menjadi persamaan orde satu melalui substitusi pada turunan variabel, sementara konstanta-konstanta yang muncul ditetapkan berdasarkan akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Temuan penelitian menunjukkan bahwa metode ini dapat memberikan solusi umum yang setara dengan pendekatan konvensional, tetapi melalui prosedur yang lebih ringkas. Selain itu, hasil perhitungannya ditampilkan secara grafis menggunakan aplikasi Desmos, sehingga memudahkan dalam memahami bagaimana fungsi solusi berubah terhadap variabel bebasnya.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan bentuk relasi matematika yang melibatkan suatu fungsi bersama derivatifnya terhadap satu atau lebih variabel independen. Persamaan ini digunakan sebagai alat pemodelan untuk menggambarkan beragam fenomena alam dan kejadian yang bersifat dinamis, seperti perubahan temperatur, pergerakan benda, serta pertumbuhan atau penurunan populasi [1].

Secara garis besar, persamaan diferensial terbagi menjadi dua kategori utama, yakni persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*/ODE) dan persamaan diferensial parsial (*Partial Differential Equation*/PDE). Persamaan diferensial biasa melibatkan satu variabel bebas saja, sementara persamaan diferensial parsial mencakup dua atau lebih variabel bebas dan mengandung turunan parsial dari fungsi yang belum diketahui[2].

Ditinjau dari sifat homogenitasnya, persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi persamaan homogen dan tidak homogen. Persamaan homogen tidak memuat suku bebas, sedangkan persamaan tak homogen memiliki suku tambahan yang bernilai bukan nol. Untuk menyelesaikan persamaan tak homogen, terdapat beberapa teknik analitik seperti metode koefisien tak tentu maupun variasi parameter, yang umumnya mensyaratkan penentuan solusi homogen sebagai langkah awal[3].

Namun, dengan berkembangnya teknik analitik, hadir pendekatan lain seperti metode reduksi orde yang memungkinkan persamaan diferensial diselesaikan tanpa harus mencari solusi homogen sebelumnya. Cara ini menawarkan proses yang lebih efisien, khususnya untuk persamaan yang strukturnya rumit dan tidak mudah ditangani dengan metode-metode konvensional.

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU

Pengertian

Persamaan diferensial orde satu adalah persamaan yang memuat turunan pertama dari suatu fungsi terhadap satu variabel bebas. Istilah orde satu menunjukkan bahwa turunan tertinggi yang muncul di dalam persamaan tersebut hanyalah turunan pertama.

Persamaan diferensial linier pada orde pertama dapat dinyatakan dalam bentuk dasar sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

dimana P(x) dan Q(x) adalah fungsi yang bersifat kontinu pada interval tertentu.

Metode Penyelesaian

Penyelesaian persamaan ini memanfaatkan faktor pengintegrasi (*integrating factor*), yaitu sebuah fungsi yang berperan mengubah persamaan tersebut menjadi bentuk turunan dari hasil kali dua fungsi.

Fungsi yang digunakan sebagai faktor pengintegrasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Tahapan penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. $Mengalikan\ seluruh\ bentuk\ persamaan\ dengan\ faktor\ pengintegrasi\mu(x).$
2. $Sehingga\ persamaannya\ berubah\ menjadi$:
$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)Q(x)$$
3. $Lakukan\ pengintegrasian\ pada\ kedua\ sisi\ persamaan\ terhadap\ x$:

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)Q(x)\, dx + C$$

4. $Bentuk\ solusi\ umumnya\ adalah\ sebagai\ berikut$:
   $y(x) \;=\; e\text{^}\{-\int P(x)dx\} \vdash[\int e\text{^}\{\int P(x)dx\}\, Q(x)\, dx \;+\; C\backslash right]$

Contoh Soal 1

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$$

Penyelesaian:

$Strukturnya\ memenuhi\ bentuk\ persamaan\ linier$:

$$P(x) = 2, \quad Q(x) = 4x$$

$$Faktor\ pengintegrasi:$$
$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$Kalikan\ kedua\ ruas\ dengan\ e^{2x}:$$
$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 4xe^{2x}$$

$$Bagian\ sebelah\ kiri\ merupakan\ hasil\ turunan\ dari\ e^{2x}y:$$
$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = 4xe^{2x}$$

$$Lakukan\ proses\ integrasi\ pada\ kedua\ pihak:$$
$$e^{2x}y = \int 4xe^{2x}dx$$

$Terapkan\ metode\ integrasi\ parsial$:

$$u = 4x \Rightarrow du = 4dx, \quad dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int 4xe^{2x}\, dx = 2xe^{2x} - \int 2e^{2x}\, dx = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$$

$Sehingga$:
$e^{2x}y = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$

$y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$

$Solusi\ umum$:

$\boxed{y(x) = 2x - 1 + Ce^{-2x}}$

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE DUA

Pengertian

Persamaan diferensial orde dua merupakan persamaan yang memuat turunan kedua dari suatu fungsi yang belum diketahui terhadap variabel bebasnya.

$Format\ dasarnya\ adalah\ sebagai\ berikut:$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$$

$Jika\ g(x) = 0, disebut\ homogen, dan\ jika\ g(x) \neq 0, disebut\ tidak\ homogen.$

$Untuk\ persamaan\ dengan\ koefisien\ bernilai\ konstan, maka\ persamaannya:$

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Penyelesaian Umum

Tahap awal dilakukan dengan mencari solusi untuk bagian homogen, yaitu:

$$y'' + ay' + by = 0$$

Susunlah persamaan karakteristiknya:

$$r^2 + ar + b = 0$$

Akar-akar r_1 dan r_2 menentukan bentuk solusi:

- Jika r_1 dan r_2 berbeda dan real:
  $y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- Jika r_1 = r_2:

$y_h = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

- Jika akar kompleks r = $\alpha \pm \beta i$:
  $y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Kemudian tentukan solusi particular y_p sesuai bentuk f(x).
Solusi total:
$y(x) = y_h + y_p$

Contoh Soal 2

Tentukan hasil penyelesaian dari persamaan diferensial berikut:

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

Penyelesaian:

Untuk bagian homogen diperoleh:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r - 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

$Selanjutnya, tentukan\ solusi\ partikular\ y_p.$

$Karena\ bagian\ ruas\ kanan\ memiliki\ bentuk\ e^x, digunakan\ bentuk\ y_p = Ae$ x.

Masukkan kembali ke dalam persamaannya:

$$(Ae^x)'' - 3(Ae^x)' + 2(Ae^x) = e^x$$
$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = e^x$$
$$0 = e^x$$

Karena e^x sudah muncul dalam solusi homogen, maka bentuknya dikalikan dengan x:

$y_p =$ bstitusi kembali:

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

Substitusikan kembali ke dalam persamaan:

$$(2Ae^x + Axe^x) - 3(Ae^x + Axe^x) + 2(Axe^x) = e^x$$

$$(2A - 3A)e^x + (A - 3A + 2A)xe^x = e^x$$

$$(-A)e^x = e^x$$

$$A = -1$$

Sehingga:

$$y_p = -xe^x$$

Solusi umum:

$$\boxed{y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x}$$

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TAK HOMOGEN

Pengertian

Persamaan diferensial tidak homogen merupakan persamaan yang memiliki ruas kanan (f(x)) tidak bernilai nol. Adanya f(x) menandakan terdapat pengaruh atau input dari luar pada sistem, sehingga solusi keseluruhannya tersusun atas dua komponen:

1. Solusi homogen y_h
2. Solusi particular y_p

$$y(x) = y_h + y_p$$

Metode Umum

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan tak homogen, di antaranya:

1. Metode Koefisien Tak Tentu, diterapkan apabila f(x) memiliki bentuk yang relatif sederhana, seperti polinomial, fungsi eksponensial, atau sinus dan cosinus.
2. Metode Variasi Parameter, dipakai ketika f(x) memiliki bentuk yang lebih kompleks.
3. Metode Faktor Integrasi, digunakan apabila persamaannya dapat diturunkan menjadi bentuk orde satu.

Contoh Soal 3

Selesaikan persamaan diferensial:

$$y'' + y = \sin x$$

Penyelesaian:

Langkah 1: Persamaan karakteristik:

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i$$
$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Langkah 2: Cari solusi particular y_p.

Karena ruas kanan terdapat sin x, dan bentuk ini telah menjadi bagian dari solusi homogen, maka bentuk y_p perlu diubah menjadi:

$$y_p = x(A \cos x + B \sin x)$$

Turunkan:

$$y_p' = A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x$$
$$y_p'' = -A \sin x + B \cos x - A \sin x - B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x$$

Substitusi ke persamaan $y'' + y = \sin x$:
Setelah penyederhanaan, diperoleh:

$$2B \cos x - 2A \sin x = \sin x$$

Bandingkan koefisien:

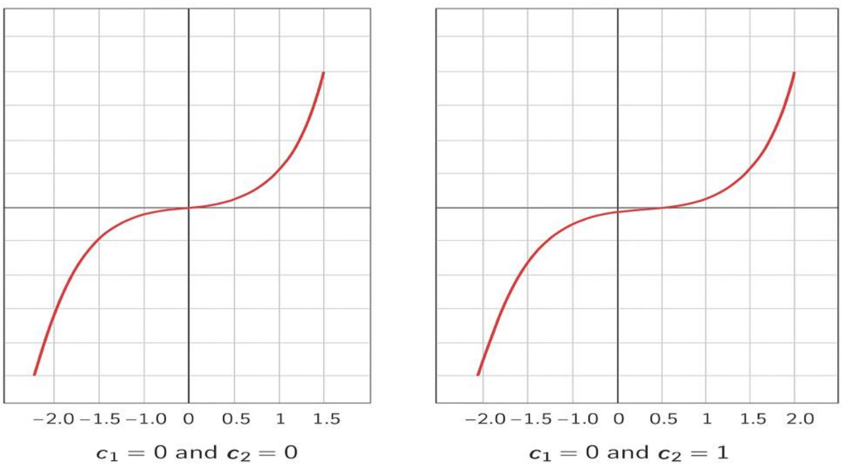
$$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad 2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x\text{x}$$

Solusi umum:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x}$$

Berikut merupakan visualisasi penyelesaian permaslahan



PENUTUP

Secara keseluruhan, penyelesaian persamaan diferensial biasa tak homogen orde dua dengan koefisien konstan dapat dipermudah dengan menerapkan metode reduksi orde. Melalui teknik ini, persamaan yang awalnya memiliki turunan hingga orde dua ditransformasikan menjadi persamaan diferensial orde satu, sehingga proses pencariannya menjadi lebih ringan dan sistematis. Berdasarkan tahapan analisis yang dilakukan, terbukti bahwa metode reduksi orde mampu menghasilkan bentuk solusi umum yang setara dengan pendekatan klasik. Menariknya, proses ini tidak mengharuskan penentuan solusi homogen di awal, karena bentuk umum solusi dapat diperoleh langsung melalui reduksi tersebut tanpa langkah perantara yang biasanya diperlukan pada metode-metode tradisional.

Bentuk persamaan diferensial yang menjadi fokus dalam penelitian ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y{\prime}{\prime}(x) + a y{\prime}(x) + b y(x) = f(x)$$

dengan r_1 dan r_2 sebagai akar-akar dari persamaan karakteristik. Melalui penerapan metode reduksi orde, bentuk solusi umumnya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$y(x) = e^{-r_1x} \int e^{r_1x} f(x)\, dx$$

$$\quad \text{atau} \quad$$

$$y(x) = e^{-r_2x} \int e^{r_2x} f(x)\, dx$$

Solusi yang diperoleh selanjutnya dapat disesuaikan dengan kondisi tertentu melalui pemberian nilai konstanta yang spesifik, sehingga menghasilkan bentuk numerik maupun grafik yang bervariasi sesuai dengan fungsi f(x) yang digunakan. Melalui visualisasi menggunakan aplikasi Desmos, dapat terlihat dengan jelas bagaimana perubahan nilai konstanta ataupun variasi fungsi pemaksa f(x) memberikan pengaruh terhadap bentuk kurva solusi yang dihasilkan.

Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa metode reduksi orde menawarkan cara penyelesaian yang lebih ringkas dan terstruktur untuk persamaan diferensial biasa tak homogen orde dua, terutama pada kasus dengan koefisien konstan.

REFERENSI

S. Devi & M. Jakhar, "An Introduction to Differential Equations," *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 115-117, 2018.

Denis Byakatonda, "*An Overview of Numerical and Analytical Methods for solving Ordinary Differential Equations*," arXiv preprint arXiv:2012.07558, 2020.

M.K.A. Kaabar, *A Friendly Introduction to Differential Equations*, arXiv preprint arXiv:1807.08633, 2018.

HILDA LADAN BILJANI : Jurusan Pendidikan Matematika UIN SUSKA, Pekanbaru,

12210523977@students.uin-suska.ac.id